



TITLE:

光ソリトーン積分可能性から制御可能性へ(非線形可積分系による応用解析)

AUTHOR(S):

長谷川, 晃

CITATION:

長谷川, 晃. 光ソリトーン積分可能性から制御可能性へ(非線形可積分系による応用解析). 数理解析研究所講究録 1994, 889: 94-100

ISSUE DATE:

1994-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84359>

RIGHT:

光ソリトン—積分可能性から制御可能性へ

大阪大学工学部通信工学科 長谷川 晃 (Akira Hasegawa)

要旨

ファイバー中の光ソリトンはソリトンという数学的オブジェクトを実用可能段階に持ってきた数少ない成功例の 1 つである。その蔭には半導体レーザー・低損失ファイバー・光増幅器などの出現といった光技術の進歩が大きな役割を果たしたことはいうまでもない。しかしこれらの技術的進歩に加え高速でより長い距離にわたった伝送をしたいという社会的な要求が存在していることも大きな要因となっている。光ソリトンは次の 2 つの意味で高速通信に大きなインパクトを与えるようになった。一つは理想的なモデル方程式、非線形シュレーディンガー方程式の持っている積分可能性の性質である。この性質から通信に不可欠な入出力関係がソリトンという媒質を用いることにより厳密に可能であることが証明された。さらにどのような入力波形に対してもその振幅があるしきい値を越えている場合には、これがソリトンの集合になるという事実も大きな役割を果たしている。第 2 は制御可能性である。長距離にわたるソリトン伝送においては増幅器の雑音とかファイバーの非線形性あるいは高次の分散性による各種の擾乱を受ける。このため前記の積分可能性が破れ信号誤り率の原因となる。しかしソリトンの固有な性質を用いることによりこれらの影響を除去又は低減することができる。この論文ではこういった光ソリトンの持つ特徴が、いかにソリトンの実用化に貢献しているかについて述べる。

I. 積分可能性

この節では光ソリトンのモデル方程式である非線形シュレーディンガー方程式がどのような物理的背景から導かれ、またこのことがいかに高速通信へのソリトンの応用に関係しているかを説明しよう。光ファイバーの性質は普通その屈折率 n で表すことができる。屈折率 n は線形部分 n_0 及び非線形部分 $n_2 |\bar{E}|^2$ で表すことができる。ここに \bar{E} は光波電場のフーリエ振幅を表す。 n_0 は一般に光の波長あるいは角周波数の関数となり、これが分散性を生み出す。 n_2 はカー係数と呼ばれる屈折率の非線形性を表す係数である。これらを用いると光の波数 k は

$$k = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} \left[n_0(\omega) + n_2 |\bar{E}|^2 \right] \quad (1)$$

で表すことができる。ここに ω は光波の角周波数、 c は光の速度を表す。光ソリトンは光波の包絡線関数 q が満たす非線形シュレーディンガー方程式の持つソリトン解で表すことができる。

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q = 0 \quad (2)$$

ここで第2項は群速度分散を表す項で、(1)式の k の ω による2回微分に比例する。また非線形項は(1)式のカー係数から作られる。非線形分散式(1)から非線形シュレーディンガー方程式(2)は簡単に導くことができる。¹ しかし実際の光波の伝送に(2)式が意味を持つためには物理的な要因が伴わなければならない。例えば非線形効果を考えてみよう。カー係数 n_2 は $(10^{-22} \text{ m/V})^2$ 程度の値しか持たない。ファイバー中の電場の振幅はほぼ 10^5 乃至 10^6 V/m 程度なので、非線形効果による屈折率の変化はたかだか 10^{-12} ないし 10^{-10} 程度にしかない。それではどうしてこれ程小さい非線形屈折率が大きな影響を及ぼすかといえ、伝送距離が光波の波長に比べ非常に大きいからである。非線形な屈折率の変化のため、波数の変化は1波長の距離進むごとに 10^{-10} ないし 10^{-12} の変化を受けるが、光波の波長はほぼ1.5ミクロン程度であるため、1000 km も走るとこの効果は 10^{12} 倍になる。このため、わずかなカー効果による屈折率の変化が光波の伝送に大きな影響を及ぼすことになるのだ。分散効果についても同様のことが言え、パルス幅がほぼ10ピコ秒程度の光パルスは同様に分散性による波束の変化を受ける。このため方程式(2)で記述できる非線形シュレーディンガー方程式はパルス幅10ピコ秒ピーク電力数mW程度の光波に対し、光波の作るソリトンを記述するのに適している。

周知の通り非線形シュレーディンガー方程式2のラックス対はZakharovとShabat²によって求められた。そのスペクトル方程式は、

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \psi_1}{\partial T} + q\psi_2 &= \xi\psi_1, \\ -i\frac{\partial \psi_2}{\partial T} - q^*\psi_1 &= \xi\psi_2, \\ \xi_n &= \frac{\kappa_n + i\eta_n}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。ラックス対の性質から固有値 λ は Z に対し不変であるため、初期の光

波の包絡線 $q(Z=0,T)$ が与えられると、発生するソリトンの振幅 η 及び周波数 κ は規定される。この積分可能性がファイバーを用いた光通信に基本的な貢献をすることになる。線形回路であれば入力信号の周波数スペクトルが与えられると、出力信号の周波数スペクトルはフーリエ変換の手法を用いて一義的に決定することが出来る。このためフーリエ成分に情報を乗せて信号を伝達することが可能になる。しかし、この例で示すような非線形伝送系に対しては、フーリエスペクトルは信号を伝達するのに適していず、ソリトンパラメータ η, κ が適していることがわかる。しかし実際のファイバーでは損失が無視出来ないため、光増幅器などの手段を用い損失のない線路を作ってやる必要がある。この場合光波の包絡線の伝送を表す式(2)は次式

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q = -i[\Gamma - g(Z)]q \quad (4)$$

のように修正される。ここに Γ はファイバー損失、 $g(Z)$ は増幅器の増幅率を表す。

(4) 式の Γ はソリトンのパルス幅で決まる分散距離の大きさによって変化する量である。例えば、10ピコ秒以上のパルス幅のソリトンに対しては普通分散距離は数百キロメートルになるのに対し、ファイバーの減衰距離はほぼ30キロメートルであるため、 Γ の値は1よりはるかに大きくなる。このような領域ではソリトンの性質は非断熱的になる。一方パルス幅が10ピコ秒よりも充分小さいと、 Γ は1より小さくなるため、ソリトンの伝送は断熱的になる。非断熱的な領域では非線形シュレディンガー方程式の右辺の擾乱項は非常に大きな値となるため、ソリトンの発生が困難であるように見えるが、もし、減衰と増幅を繰り返して行い、平均として損失のないような状態にしてやると、(4) 式の右辺は周期的な擾乱を与えることになり、適当な変数変換(リー変換)を用いることにより、(4) 式は理想的な損失のない非線形シュレディンガー方程式(2)に持っていくことが出来る。³ この結果、長距離に渡って増幅を繰り返しながら進む光波の包絡線はソリトンを作り、積分可能性の性質が保たれることが示される。

II. 制御可能性

光ソリトンを通信に利用する場合に理想的な非線形シュレディンガー方程式の解であれば、通信システムへの入力と出力への関係が一義的に決まるため問題はないが、しかし例えば増幅器を繰り返して使用したり、ファイバーの高次の効果が発生したり、あるいはソリトン同志の干渉が起こったりするとIで論じた積分可能性が破壊され、通信システムとしての誤りの原因を生み出す。このためこういった擾乱の影響を出来るだけ低減する方法を考える必要がある。この方法もソリトンとしての数学的性質をフルに利用することによって達成される。従ってソリトンの制御可能性も数学の問題として興味ある問題となる。ソリトンに対する擾乱の効果を低減する一つの具体例として、線形フィルターを用いる方法をまず紹介しよう。周波数特性が図で示されるような線形フィルターを用いると、このフィルターの効果は(2)の非線形シュレディンガー方程式の右辺に $i\beta\partial^2 q/\partial T^2$ で示されるような項を入れることによって記述できる。この式は所謂ギンズバーグ・ランドウの特殊な例に相当し、このままでは積分可能性は失われる。しかし、1ソリトン解を想定し、そのソリトンパラメータ（スペクトル方程式の固有値 ξ ）、 η, κ の振舞が右辺の擾乱項によってどのようになるかを計算することは容易である。ソリトン問題の重要な特徴は元来無限次元の問題を、ソリトンパラメータ（離散的固有値）という有限次元で処理出来るところにある。実際には擾乱により有限次元の離散的固有値と連続固有値の間に相互干渉がおこり、こういった仮定が破れる場合が多いが問題を有限次元の問題と考えることにより、擾乱の影響にある程度見通しをつけることが出来る。(5)式で表されているような周波数フィルターの影響を考慮すると、ソリトンの振幅および周波数、振幅 η および周波数 κ に対してダイナミカルな方程式を導くことが出来る。一般にこの方程式は次式で表される形をしている。

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dZ} &= G(\eta, \kappa) \\ \frac{d\kappa}{dZ} &= H(\eta, \kappa)\end{aligned}\tag{5}$$

(5) 式のダイナミカル方程式を解くことにより、擾乱項がソリトンにどのような影響を与えるかは容易に知ることが出来る。図2はフィルターによる擾乱により発生する η, κ 面の軌道の動きを示すものである。この結果から明らかな通り、周波数フィルターは η, κ の位相空間面で、ある安定点に軌道を収束させる性質を持つ。この

性質を使うと、増幅器の雑音などの擾乱によりソリトンパラメータが初期の固有値から変位した場合にも、これを引き戻し所定のパラメータの値に持っていくことが可能である。これが制御可能性の一つの具体例である。これ以外の人為的な擾乱によりソリトンパラメータを任意に制御する方法がいくつか考えられ、実験的に確認されている。ここで注意したいのはこうした制御方法はソリトンのみに適用されることである。その結果、制御方法を上手く選んでやると、ソリトンの運ぶ信号と増幅器などの雑音を分離することが可能になる。このことはソリトンを通信用に用いるための積分可能性に次ぐ第2の重要なファクターである。線形通信方式では、信号と同じ周波数帯に混入した雑音は取り除くことが出来ない。従って増幅を繰り返して通信を行うと、線形信号は必ず劣化する。しかし上記の例の示す通り、ソリトンパラメータのみをその位相空間で移動するような制御を行えば、同じ周波数帯に混在した信号と雑音を分離することが出来る。この事実は従来の情報理論に革命的な影響を与えるもので、新しいソリトン通信理論を構築する手がかりとなる。

結言

光ソリトンを用いた高速通信という光学的応用例は、単にそれが応用としての価値を持つだけではなく、ソリトンの持つ数学的な性質がフルに活用されるという意味で興味深いテーマとなっている。数学的にこの問題を見ることは、本質的にはソリトンのパートーション理論の構築になるわけだが、ソリトン方程式に擾乱が加わった時のソリトンパラメータの変化、あるいは連続スペクトルと離散スペクトルの間の結合関係を研究するという意味合いを持っている。こうした数学的な問題が、実際の光波の伝導に直接影響を与えたり、光波の振舞を記述するのに役立つという意味で、光ソリトンのケースは単に現実問題の積分可能性の域を越えた興味ある数学的問題を提供してくれる。

図の説明

図1. ソリトン制御のための周波数フィルターの周波数特性

図2. 周波数フィルターを用いた場合のソリトンパラメータ η と κ の振舞

参考文献

1. A.Hasegawa and F.Tappert, Appl. Phys. Lett. **23**, 142 (1973)
2. V.E.Zakharov and A.B.Shabat, Sov. Phys. JETP **34**, 62 (1972)
3. A.Hasegawa and Y.Kodama, Phys. Rev. Lett. **66**, 161 (1991)
4. Y.Kodama and A.Hasegawa, Opt. Lett. **17**, 31 (1992)
5. A.Mecozzi, J.D.Moores, H.A.Haus and Y.Lai, Opt. Lett. **16**, 1841 (1991)

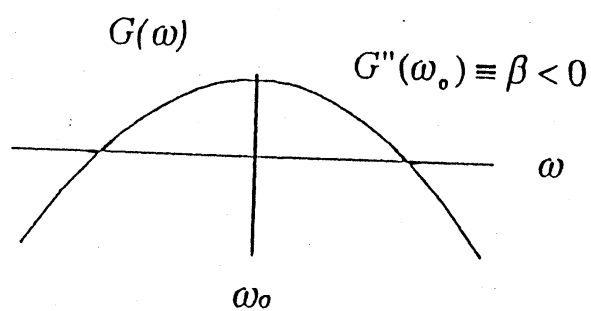


図1. ソリトン制御のための周波数フィルターの周波数特性

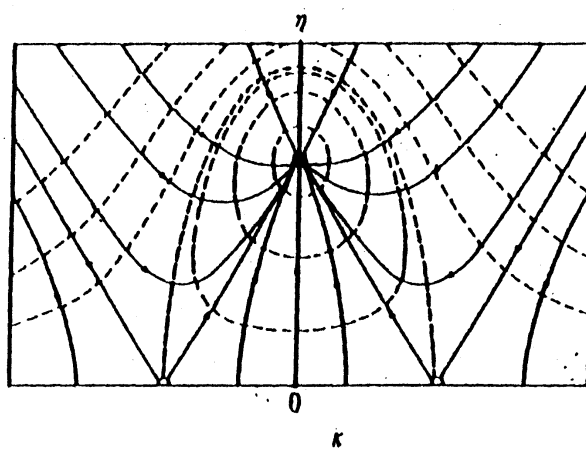


図2. 周波数フィルターを用いた場合のソリトンパラメータ η と κ の振舞